

Correction Devoir maison n°10

Exercice 1 - Obligatoire pour les groupes 9 et 10

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = a \text{ et pour tout entier } n, u_{n+1} = u_n(2 - u_n),$$

où a est un réel tel que $0 < a < 1$.

1. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} (polynôme) et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2 - 2x$$

On a $2 - 2x > 0 \iff 1 > x$. Sachant que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. D'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	-
Variations de f				

2. (a) On montre les propriétés suivantes $\mathcal{P}_n : \{0 < u_n < 1\}$.

— **Initialisation** : $u_0 = a \in]0, 1[$ donc la propriété \mathcal{P}_0 est vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . On a donc

$$\begin{aligned} 0 < u_n < 1 \\ \implies f(0) < f(u_n) < f(1) \quad (\text{La fonction } f \text{ est croissante sur } [0, 1].) \\ \implies 0 < u_{n+1} < 1 \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

- (b) On sait que pour tout entier n , $u_n > 0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 - u_n > 1$$

car $u_n < 1$.

La suite u_n est donc croissante .

- (c) La suite est croissante et majorée par 1. Elle est donc convergente et tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. On a nécessairement

$$f(\ell) = \ell \iff 2\ell - \ell^2 = \ell \iff \ell^2 - \ell = 0$$

Les solutions possibles sont 0 et 1. Or, la suite (u_n) est croissante donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.}$$

3. On considère la suite numérique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur \mathbb{N} par :

$$v_n = 1 - u_n$$

(a) Pour tout entier n ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 1 - u_{n+1} \\ &= 1 - (2u_n - u_n^2) \\ &= 1 - 2u_n + u_n^2 \\ &= (1 - u_n)^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = v_n^2.}$$

(b) On montre les propriétés suivantes $\mathcal{P}_n : \{v_n = (1 - a)^{2^n}\}$.

— **Initialisation** : $v_0 = 1 - a$ et $(1 - a)^{2^0} = 1 - a$ donc la propriété \mathcal{P}_0 est vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . On a donc

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n^2 \\ &= \left((1 - a)^{2^n}\right)^2 \\ &= (1 - a)^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n = (1 - a)^{2^n} .}$

(c) On a $1 - a \in]0, 1[$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} (1 - a)^X = 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.}$$

Et comme $u_n = 1 - v_n$, on retrouve

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.}$$

4. On considère le temps de vie d'une machine à café. En sortant de l'usine (au temps $t = 0$), la machine à café à une probabilité a d'être cassé ($0 < a < 1$). On notera A_n l'événement "la machine est cassé au temps $t = n$ " et $p_n = p(A_n)$. Si la machine est cassé au temps $t = n$ elle reste cassé au temps $t = n + 1$. Si la machine est en état de marche au temps $t = n$, elle a la probabilité p_n d'être cassé au temps $t = n + 1$.

(a) Les évènements A_0 et $\overline{A_0}$ forment un système complet d'évènements. Donc, d'après la formule des probabilités totales.

$$\begin{aligned} p_1 &= p(A_1) = p(A_0)p_{A_0}(A_1) + P(\overline{A_0})P_{\overline{A_0}}(A_1) \\ &= a \times 1 + (1 - a)p_0 \\ &= a + (1 - a)a \\ &= 2a - a^2 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{On conclut que } p_1 = a(2 - a).}$

- (b) Les évènements A_0 et $\overline{A_0}$ forment un système complet d'évènements. Donc, d'après la formule des probabilités totales.

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p(A_{n+1}) = p(A_n)p_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= p_n \times 1 + (1 - p_n)p_n \\ &= p_n(2 - p_n) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = p_n(2 - p_n).}$$

- (c) La suite (p_n) est la même que la suite u_n de la première partie. On a donc

$$\boxed{p_n = 1 - v_n = 1 - (1 - a)^{2^n}.$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1.}$$

Cela signifie que sur le long terme, la machine à café finira par être cassé (ce qui est logique finalement).

Exercice 2 - Obligatoire pour tous les groupes

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n^2)$.

1. Script Scilab

```
n = input("Entrez un entier n")
u = 1
for k = 1:n
    u = log(1 + u^2)
end
disp(u)
```

2. On montre les propriétés suivantes $\mathcal{P}_n : \{0 \leq u_n \leq 1\}$.

- **Initialisation** : $u_0 = 1$ donc la propriété \mathcal{P}_0 est donc vraie.
- **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . On a donc

$$\begin{aligned} &0 \leq u_n \leq 1 \\ \implies &0 \leq u_n^2 \leq 1 \\ \implies &1 \leq 1 + u_n^2 \leq 2 \\ \implies &0 \leq \ln(1 + u_n^2) \leq \ln(2) \leq 1 \\ \implies &0 \leq u_{n+1} \leq 1 \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

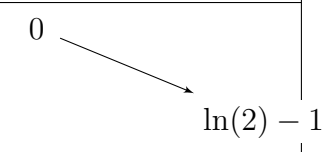
- **Conclusion** : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1.}$

3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$, à valeurs réelles, telle que $f(x) = \ln(1 + x^2) - x$.

- (a) La fonction f est dérivable sur $[0, 1]$ en tant que composée et somme de fonction dérivable sur $[0, 1]$ et

$$\forall x \in [0, 1], \quad f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = \frac{-x^2 + 2x - 1}{1+x^2} = \frac{-(1-x)^2}{1+x^2} \leq 0$$

La fonction f est décroissante. $f(0) = 0$ et $f(1) = \ln(2) - 1$.

x	0	1
Signe de $f'(x)$	-	
Variations de f		

On en déduit que

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], \quad f(x) \leq 0}$$

- (b) On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$. On a donc

$$f(u_n) \leq 0 \iff u_{n+1} - u_n \leq 0$$

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc décroissante.}}$

- (c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.

$\boxed{\text{Elle est donc convergente.}}$

4. (a) On pose la fonction $g : x \rightarrow \ln(1+x) - x$. Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R}_+ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \leq 0$$

La fonction g est donc décroissante et $g(0) = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) \leq 0$, c'est à dire

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad \ln(1+x) \leq x}$$

- (b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 > 0$ et donc, d'après la question précédente

$$\boxed{u_{n+1} = \ln(1 + u_n^2) \leq u_n^2.}$$

- (c) On montre les propriétés suivantes $\mathcal{P}_n : \{u_n \leq (\ln 2)^n\}$.

- **Initialisation** : $u_0 \leq 1$ donc la propriété \mathcal{P}_0 est donc vraie.
- **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . On a donc

$$\begin{aligned} & u_{n+1} \leq u_n^2 \\ \implies & u_{n+1} \leq (\ln 2)^n \times (\ln 2)^n \\ \implies & u_{n+1} \leq (\ln 2)^{n+1} \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $(\ln 2)^n \leq \ln(2)$ pour $n \geq 1$. La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

- **Conclusion** : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \leq (\ln 2)^n.}$

- (d) On a pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n$. Comme $\ln 2 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln 2)^n = 0$. Donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

- (e) Soit $n \geq 2$, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} u_k &\leq (\ln 2)^k \\ \implies \sum_{k=0}^{n-1} u_k &\leq \sum_{k=0}^{n-1} (\ln 2)^k \\ \implies \sum_{k=0}^{n-1} u_k &\leq \frac{1 - (\ln 2)^n}{1 - \ln 2} \end{aligned}$$

Exercice 3 - Obligatoire pour les groupes 1 à 4

1. Montrons par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe bien et est strictement positif.

Tout d'abord u_0 est bien défini et, par définition, $u_0 > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que u_n existe et que $u_n > 0$.

u_n étant non nul, $\frac{a}{u_n}$ est bien défini donc u_{n+1} existe bien. De plus $u_n > 0$ et $a > 0$ donc $\frac{a}{u_n} > 0$ et

$u_n + \frac{a}{u_n} > 0$ d'où $u_{n+1} > 0$.

On peut alors affirmer, d'après le principe de récurrence, que

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \text{ existe bien et est strictement positif.}}$$

2. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{x^2} \right)$. Ainsi, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) \geq 0 \iff 1 \geq \frac{a}{x^2} \iff x^2 \geq a \iff x \geq \sqrt{a} \text{ (car } x > 0 \text{ et } a > 0)$$

f est décroissante sur $]0, \sqrt{a}]$ et croissante sur $[\sqrt{a}, +\infty[$ donc, pour tout $x > 0$, $f(x) \geq f(\sqrt{a})$. Or

$$f(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a} + \frac{a}{\sqrt{a}} \right) = \frac{1}{2} (2\sqrt{a}) = \sqrt{a}.$$

$$\boxed{\forall x > 0, f(x) \geq \sqrt{a}.}$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = f(u_{n-1})$. Or $u_{n-1} > 0$ d'après la question (1) donc la question (2) nous permet d'affirmer que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \sqrt{a}.}$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right) - u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{u_n} - u_n \right) = \frac{1}{2} \frac{a - u_n^2}{u_n}.$$

Or $n \in \mathbb{N}^*$ d'où $u_n \geq \sqrt{a}$ et $u_n^2 \geq a$. On en déduit, puisque $u_n > 0$, que $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

$$\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante à partir du rang 1.}}$$

- (c) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par \sqrt{a} donc, d'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell \geq \sqrt{a}$. Ainsi

$$\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \geq \sqrt{a}.}$$

(d) f est continue sur $[\sqrt{a}, +\infty[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ donc $\ell = f(\ell)$. On a donc

$$\ell = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{a}{\ell} \right) \iff \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\ell} - \ell \right) = 0 \iff \frac{1}{2} \frac{a - \ell^2}{\ell} = 0 \iff \ell^2 = a \iff \ell = \sqrt{a} \text{ car } \ell \geq \sqrt{a} \geq 0.$$

$$\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \sqrt{a}.}$$

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \frac{\frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right) - \sqrt{a}}{\frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right) + \sqrt{a}} = \frac{u_n + \frac{a}{u_n} - 2\sqrt{a}}{u_n + \frac{a}{u_n} + 2\sqrt{a}} = \frac{u_n^2 + a - 2\sqrt{a}u_n}{u_n^2 + a + 2\sqrt{a}u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{(u_n + \sqrt{a})^2}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \left(\frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} \right)^2.}$$

(b) Montrons par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} = \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} \right)^{2^n}.$$

Tout d'abord, on a bien

$$\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} \right)^{2^0} = \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} \right)^1 = \frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que

$$\frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} = \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} \right)^{2^n}.$$

Alors, d'après la question (4)(a),

$$\frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \left(\frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} \right)^2 = \left(\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} \right)^{2^n} \right)^2 = \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} \right)^{2 \times 2^n} = \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} \right)^{2^{n+1}}$$

donc l'égalité reste vraie au rang $n + 1$.

D'après le principe de récurrence, on peut ainsi affirmer que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} = \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} \right)^{2^n}.$$